ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE

SESSION 1994

Dans tout le problème a désigne un paramètre réel tel que $|a| < 1$.

Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, g et h les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, définies respectivement par :

$$f : (x,\theta) \mapsto f(x,\theta) = \frac{\sin\theta}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}$$

$$g : (x,\theta) \mapsto g(x,\theta) = \frac{1}{x + e^{i\theta}}$$

$$h : (x,\theta) \mapsto h(x,\theta) = \frac{1}{x + e^{-i\theta}}$$

I

1) Etablir pour $\theta \neq 0, \theta \in]-\pi, +\pi[$ l'égalité : $f(x,\theta) = A\, g(x,\theta) + B\, h(x,\theta)$ où A et B sont deux constantes complexes à déterminer.

L'égalité subsiste-t-elle pour $\theta = 0$?

2) Démontrer pour tout x et pour tout $\theta \in]-\pi, +\pi[$ la relation :

$$g(x,\theta) + \frac{\partial^2 g(x,\theta)}{\partial\theta^2} = a\, x\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial x} + \beta\, x^2\frac{\partial^2 g(x,\theta)}{\partial x^2}$$

en précisant les constantes réelles a et β.

3) Les fonctions h et f vérifient-elles une relation analogue dans les mêmes conditions ?

En déduire pour tout x et pour tout $\theta \in]-\pi, +\pi[$ l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[M(x)\, f(x,\theta) + N(x)\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial x}\right]$$

où l'on déterminera les fonctions M et N.

4) Trouver, en fonction de θ supposé non nul, un majorant de $|f(x,\theta)|$ pour $x \in [0,3]$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^3 x^a f(x,\theta)dx$ existe pour tout $a \in]-1, +1[$ et pour tout $\theta \in]-\pi, +\pi[$.

Trouver de même pour $x \geq 3$ un minorant de l'expression $\frac{1}{x^2} + \frac{2\cos\theta}{x} + 1$ valable pour $\theta \in]-\pi, +\pi[$

En déduire l'existence de l'intégrale impropre $\int_3^{+\infty} x^a f(x,\theta)dx$ puis celle de $I(\theta,a) = \int_0^{+\infty} x^a f(x,\theta)dx$ pour tout $(\theta,a) \in]-\pi, +\pi[\times]-1, +1[$.

5) Justifier par des procédés analogues la convergence des intégrales impropres :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a+1}}{(x^2 + 2x\cos\theta + 1)^2} dx \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{x^{a+2}}{(x^2 + 2x\cos\theta + 1)^3} dx$$

pour tout $(\theta, a) \in]-\pi, +\pi[\times]-1, +1[$.

6) En déduire l'existence de l'intégrale $J(\theta, a) = \int_0^{+\infty} x^a \frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial\theta^2} dx$ dans les mêmes conditions.

II

On considère la suite de fonctions (ϕ_n) $n \in \mathbb{N}^*$ définies pour $\theta \in]-\pi, +\pi[$ par :

$$\phi_n : \theta \mapsto \phi_n(\theta) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} x^a f(x,\theta)\, dx .$$

1) Prouver que chacune des fonctions ϕ_n est de classe C^2 dans l'intervalle $]-\pi, +\pi[$ pour tout $a \in]-1, +1[$.

2) Soit $\Delta = [-\pi + \delta, -\delta] \cup [\delta, \pi - \delta]$ où δ est un réel strictement positif tel que :

$$-\pi < -\pi + \delta < -\delta < 0 < \delta < \pi - \delta < \pi.$$

Utilisant les majorations obtenues aux questions I_4, I_5 et I_6, trouver un majorant de $\left| \int_0^{\frac{1}{n}} x^a \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(x,\theta)\, dx \right|$ qui soit valable $\forall\, \theta \in \Delta$ et qui tende vers zéro lorsque n tend vers l'infini.

Même question pour $\left| \int_n^{+\infty} x^a \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}(x,\theta)\, dx \right|$.

3) En déduire que la suite (ϕ''_n) des dérivées d'ordre 2 par rapport à θ des fonctions ϕ_n converge uniformément sur Δ vers la fonction J :

$$\theta \mapsto J(\theta, a) = \int_0^{+\infty} x^a \frac{\partial^2 f(x,\theta)}{\partial\theta^2} dx.$$

4) En déduire que $\theta \mapsto I(\theta, a)$ est une fonction de classe C^2 dans l'ensemble $]-\pi, +\pi[- \{0\}$ pour tout $a \in]-1, +1[$ et établir une relation entre $\frac{\partial^2 I}{\partial\theta^2}(\theta, a)$ et $J(\theta, a)$.

5) Utilisant l'égalité établie au I_3, justifier pour tout couple $(\theta, a) \in]-\pi, +\pi[\times]-1, +1[$ la relation $J(\theta, a) + a^2 I(\theta, a) = 0$.

6) En déduire que la fonction $\theta \mapsto I(\theta, a)$ vérifie sur $]-\pi, +\pi[- \{0\}$ une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on résoudra en distinguant deux cas.

7) Calculer l'intégrale $I(\theta, o)$ à l'aide du changement de variables défini par $x + \cos\theta = \sin\theta \operatorname{cotg} u$.

III

Considérons la fonction K définie par $(\theta, a) \mapsto K(\theta, a) = I(\theta, a) - \theta$
avec $\theta \in]-\pi, +\pi[$ et $a \in]-1, +1[- \{0\}$.

1) Etablir l'égalité $K(\theta, a) = \int_o^{\infty} Q(x, a) f(x, \theta)\, dx$ où Q est une fonction à déterminer.

En déduire pour K une expression de la forme : $K(\theta, a) = R(\theta) \int_o^{1} \frac{x^a + x^{-a} - 2}{x^2 + 2x\cos\theta + 1} dx$ où R est une fonction à déterminer.

2) Démontrer que $\lim_{\theta \to \pi} K(\theta, a) = 0$.

En déduire l'expression de $I(\theta, a)$ pour $a \neq o$.

La fonction définie par : $a \mapsto I(\theta, a)$ est-elle continue sur $]-1, +1[$?

3) Etudier la convergence de l'intégrale impropre $L(p)$ en fonction des valeurs du réel p :
$L(p) = \int_o^{\infty} \frac{t^{p-1}}{t+1} dt$.

4) Existe-t-il des valeurs du réel p telles que $L(p) = L(1-p)$?

5) Calculer $L(p)$ après l'avoir exprimé en fonction de $I\left(\frac{\pi}{2}, 2p - 1\right)$

6) Pour tout réel K strictement positif, calculer l'intégrale :

$$S(p, K) = \int_o^{\infty} \frac{t^{p-1}}{t+K}\, dt$$